



BABAK PENYISIHAN SELEKSI TINGKAT PROVINSI

BIDANG KOMPETISI

MATEMATIKA

Olimpiade Sains Nasional Perguruan Tinggi Indonesia 2010

Petunjuk :

1. Tuliskan secara lengkap isian pada Lembar Jawab Komputer
2. Ujian seleksi ini terdiri dari **40** soal pilihan ganda
3. Setiap nomor jika dijawab **benar** akan diberi nilai **4 poin**; namun jika dijawab **salah** akan diberikan nilai **-1 poin**.
4. Disediakan waktu **150 menit**
5. Gunakan pensil 2B untuk menjawab
6. Semua jawaban harus ditulis di lembar jawaban yang tersedia
7. Peserta dapat mulai bekerja bila sudah ada tanda mulai dari pengawas.
8. Peserta harus segera berhenti bekerja bila ada tanda berhenti dari Pengawas.
9. Letakkan lembar jawaban di meja sebelah kanan dan segera meninggalkan ruangan.
10. **Tidak diperkenankan** menggunakan kalkulator.

Pilihlah jawaban yang paling tepat

1. $f(t) = \begin{cases} 2 \cos \pi t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t \text{ lainnya} \end{cases} \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \dots$

- a. $\frac{-2s}{s^2+\pi^2} e^{-s}$
- b. $\frac{-2s}{s^2+\pi^2} (e^{-s}+e^{-2s}+e^{-3s})$
- c. $\frac{-2}{s^2+\pi^2} (e^{-s} + e^{2s})$
- d. $\frac{-2s}{s^2+\pi^2} (e^{-s} + e^{-2s})$
- e. $\frac{-2s}{s^2+\pi^2} (e^{-s} + e^{-2s})$

2. Diberikan sebuah fungsi $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6 & \text{untuk } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} \\ 7x^2 & \text{untuk } x \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Banyaknya kemungkinan titik c sedemikian sehingga f kontinu di c adalah

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. 3
- e. 4

3. Misalkan $M_n(\mathbb{Z})$ menyatakan himpunan matriks persegi berukuran $n \times n$ dengan elemen-elemennya pada \mathbb{Z} , operasi \cdot menyatakan perkalian matriks

dan $\mathcal{M} = \{M \in M_2(\mathbb{Z}) : |M| \neq 0\}$, maka (\mathcal{M}, \cdot) adalah ...

- a. Grup abelian
- b. Grup non-abelian
- c. Monoid abelian dan bukan grup
- d. Monoid non-abelian dan bukan grup
- e. Tidak dapat ditentukan

4. Berapakah jumlah semua nilai k yang mungkin sehingga persamaan diferensial berikut merupakan persamaan diferensial eksak

$$((x + ky + 1)/(x + ky)) dx + (k/(x + ky)) dy = 0$$

- a. -1
 - b. 0
 - c. 1
 - d. 7
 - e. 10
5. Nomor telepon 7 digit $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ dikatakan *cantik* jika $d_1d_2d_3$ sama dengan $d_4d_5d_6$ atau sama dengan $d_5d_6d_7$ (mungkin juga sama dengan keduanya). Dengan $d_i \in \{0,1, \dots, 9\}$, banyaknya nomor telepon 7 digit yang *cantik* adalah ...
- a. 2000
 - b. 2010
 - c. 19990
 - d. 20000
 - e. 20010
6. Banyak *6-bit-string* (untaian yang terdiri dari angka 1 dan 0) dimana tidak terdapat bagian 01 pada untaian adalah
- a. 17
 - b. 19
 - c. 21
 - d. 23
 - e. 25

7. Misalkan S_n adalah himpunan semua permutasi dari $\{1, 2, \dots, n\}$. Jika σ adalah permutasi $(1\ 2)$, τ adalah permutasi $(1\ 2\ 3)$ dan ρ adalah permutasi identitas, maka yang bukan merupakan elemen dari $\langle \sigma, \tau \rangle$ adalah

- a. $(1\ 2)$
- b. $(1\ 2\ 3)$
- c. $(1\ 3)$
- d. $(2\ 3)$
- e. $(1\ 3\ 2)$

8. Misalkan s adalah sebarang permutasi dari himpunan $\{1, 2, \dots, n\}$. (dengan kata lain s merupakan fungsi bijektif $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$). Jika diketahui $s(1) = 2$, dan $s(2) = 1$ maka

- a. $s(3) = 3$
- b. L
- c. L^{-1}
- d. $-$
- e. 0

9. Misalkan \mathbb{Z} himpunan bilangan bulat dan \mathbb{Q} himpunan bilangan rasional. Misalkan $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dan $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ adalah grup, sedangkan $\theta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ adalah homomorfisma. Kernel dari θ adalah

- a. $\{0\}$
- b. \mathbb{Z}
- c. \mathbb{Q}
- d. \mathbb{Z}^{-1}
- e. 0

10. Seseorang memiliki 7 potong kertas. Ia mengambil beberapa potong lalu setiap potongan tersebut digunting menjadi 7 bagian. Secara berulang ia melakukan hal yang serupa. Jumlah potongan yang memungkinkan adalah
- 2012
 - 2011
 - 2010
 - 2009
 - 2008
11. Diketahui $G = (\mathbb{Q}, +)$ dan $H = (\mathbb{Z}^+, +)$, di bawah ini hubungan yang benar antar keduanya adalah
- $H \leq G$
 - $H \triangleleft G$
 - $G \leq H$
 - $G \triangleleft H$
 - Tidak ada jawaban yang benar
12. $2n$ pemain tenis akan berpartisipasi dalam sebuah turnamen. Banyaknya cara untuk membuat jadwal pertandingan babak pertama adalah
- $(2n)!$
 - $(2n)!/2^n n!$
 - $2 n!/2^n$
 - $2^n n!$
 - $2^n n!/(2n)!$
13. Misalkan fungsi g kontinu pada \mathbb{R} . Jika $F(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t) dt$, maka $F''(x) =$
- $g(x)$
 - $xg(x)$
 - $\frac{1}{3}(x-t)^3 g(x)$
 - $2 \int_0^x g(t) dt$
 - Tidak bisa ditentukan

14. *Semigrup* adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifat tertutup dan asosiatif. *Monoid* adalah semigrup dengan identitas. Pernyataan di bawah ini yang benar adalah

- Himpunan bilangan bulat di bawah operasi perkalian adalah monoid dan bukan grup
- Himpunan bilangan bulat positif di bawah operasi perkalian adalah semigrup dan bukan monoid
- Himpunan bilangan bulat di bawah operasi penjumlahan adalah monoid dan bukan grup
- Himpunan bilangan bulat positif di bawah operasi penjumlahan adalah semigrup dan bukan monoid
- Lebih dari satu pilihan jawaban di atas benar

15. Interval terbesar sehingga persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-3} \frac{dy}{dx} + \sqrt{x}y = \ln x, \quad y(1) = 3, y'(1) = -5$$

mempunyai solusi tunggal adalah

- $(-3, 3)$
- $(0, 1)$
- $(0, 3)$
- $(1, 3)$
- $(-\infty, \infty)$

16. $\sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} =$

- 2^{n-1}
- 2^n
- $(n-1) \cdot 2^{n-1}$
- $n \cdot 2^{n-1}$
- $n \cdot 2^n$

17. Jika $F(x)$ adalah fungsi Pembangkit (Generating Function) dari barisan yang didefinisikan sebagai $a_1 = 0, a_2 = 1$ dan $a_{n+1} = 2na_n + n(n-1)a_{n-1}$, maka pernyataan berikut yang benar adalah

- a. $\frac{F(x)}{2} = x^2F'(x) + x^3F''(x)$
- b. $F(x) = xF'(x) + x^2F''(x)$
- c. $F(x) = x(x^2F'(x))'$
- d. $F'(x) = \frac{F(x)+2x^3F''(x)}{x^2}$
- e. $F'(x^2) = 4x^6F''(x^2) + F(x)$

18. Misalkan H adalah suatu subgrup dari grup Abel G dan a, b keduanya elemen di G . Pernyataan berikut yang salah adalah

- a. $H \subseteq Ha$
- b. $Ha = Hb$
- c. $a \in Hb$
- d. $ab^{-1} \in H$
- e. $a=hb$ untuk suatu h di H

19. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin \frac{1}{x})}{x \sin \frac{1}{x}} =$

- a. 1
- b. 0
- c. -1
- d. 2
- e. Tidak ada

20. Jika $y=y(x)$ adalah solusi dari masalah nilai awal berikut

$$x \frac{dy}{dx} + 3y = 2x^5, \quad y(2) = 1$$

Berapakah nilai y pada $x = 1$

- a. 56
- b. 55
- c. 0
- d. $-55\frac{1}{2}$
- e. $-55\frac{3}{4}$

21. Digit puluhan ribu atau digit kelima dari akhir bilangan $5^{5^{5^5}}$ adalah

- a. 0
- b. 1
- c. 5
- d. 7
- e. 8

22. Jika m dan n bilangan-bilangan asli yang mempunyai faktor-faktor prima yang sama, begitu pula $m + 1$ dan $n + 1$ mempunyai faktor-faktor prima yang sama. Banyak pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi kedua sifat tersebut adalah

- a. 0
- b. 1
- c. 2
- d. 5
- e. Tak berhingga

23. Solusi masalah nilai awal dari persamaan berikut adalah:

$$(2x^2 + y) dx + (x^2y - x) dy = 0 ; y(1) = 0$$

- a. $2x - yx^{-1} - \frac{1}{2}y^2 = 2$
- b. $2x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2 = 2$
- c. $-2x + yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2 = -2$
- d. $-2x - yx^{-1} - \frac{1}{2}y^2 = -2$
- e. $2x - yx^{-1} + \frac{1}{2}y^2 = -2$

24. Banyak fungsi $\tau : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ yang memenuhi $t(1) = 1$ dan $t(k) <$

k untuk $k = 2, 3, \dots, n$ adalah

- a. $7n^2 - 45n + 74$
- b. $(n - 1)!$
- c. $4n - 10$
- d. $(n - 2)((n - 1)!)$
- e. $(4n - 10)(n - 2)$

25. Untuk bilangan bulat k dan n dimana $1 \leq k < n$, didefinisikan

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

maka $\frac{n-2k-1}{k+1} \binom{n}{k}$ adalah bilangan bulat dengan kondisi:

- a. Untuk semua k dan n
- b. Untuk semua k dan n bilangan genap
- c. Untuk semua k dan n bilangan ganji
- d. Untuk $k = 1$ atau $n = 1$
- e. n habis dibagi oleh k , tetapi tidak untuk semua k dan n

26. Diketahui $F = \frac{1}{s}$, $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$, $G = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$, $g = \mathcal{L}^{-1}\{G\}$

Dengan menggunakan teorema konvolusi diketahui $\mathcal{L}\{\int_0^t f(z)g(t-z)dz\} =$

FG . $\mathcal{L}^{-1}\{FG\} =$

- a. $0,5 \operatorname{Im}((1-2i) (e^{(1-2i)t} - 1))$
- b. $0,1 \operatorname{Im}((1-2i) (e^{(1+2i)t} + 1))$
- c. $0,5 \operatorname{Im}((1+2i) (e^{(1+2i)t} - 1))$
- d. $0,1 \operatorname{Im}((1-2i) (e^{(1+2i)t} - 1))$
- e. $0,5 \operatorname{Im}((1-2i) (e^{(1-2i)t} - 1))$

27. Nilai dari $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\arctan x^n}{x^2 + 1} dx$ adalah

- a. 0
- b. 1
- c. $\frac{\pi^2}{4}$
- d. $\frac{\pi^2}{2}$
- e. $\frac{\pi^2}{8}$

28. Sistem persamaan linear

$$2x + 2y + 3z = r$$

$$3x - y + 5z = s$$

$$x - 3y + 2z = t$$

akan mempunyai solusi apabila

- a. $r + 2s + t = 0$
- b. $t = s - r$
- c. $s - 3t = 0$
- d. $3r - s - 2t = 1$
- e. $r = s = t = 0$

29. Diketahui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = 9$$

maka nilai c adalah

- a. $2 \ln 3$
- b. $2 \ln 3 + 1$
- c. $\ln 3$
- d. $\ln 3 + 1$
- e. $\ln 3 - 1$

30. Jika ada tiga ekor kuda mengikuti sebuah lomba pacuan, maka banyak cara tiga kuda tersebut melewati garis finis adalah

- a. 13
- b. 6
- c. 12
- d. 7
- e. 14

31. Jika a dan b adalah bilangan riil yang memenuhi

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2 + bx + a}{x(2x + a)} - 1 dx = 1$$

maka nilai dari $\frac{a+b}{2}$ adalah

- a. e
- b. $2e$
- c. $e - 1$
- d. $2(e - 1)$
- e. $\frac{e}{2}$

32. Jika $a_n - 3a_{n-1} = 2 - 2n^2$, $a_0 = 3$ maka $a_{99} =$

- a. $-3^{99} + 99^2 + 297$
- b. $3^{99} + 99^2 + 297$
- c. $3^{99} + 99^2 + 299$
- d. $5 \cdot 3^{99} + 99^2 + 297$
- e. $5 \cdot 3^{99} + 99^2 + 299$

33. Nilai dari $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} (-1)^{j+k}$ adalah

- a. 1
- b. $\frac{1}{2}$
- c. $\frac{1}{3}$
- d. $\frac{1}{4}$
- e. 0

34. Jika x bilangan asli terkecil sehingga x dibagi 4 bersisa 3, x dibagi 5 bersisa 4, x dibagi 7 bersisa 2 dan x dibagi 9 bersisa 6, maka jumlah digit-digit dari x adalah

- a. 6
- b. 9
- c. 12
- d. 15
- e. 18

35. Sebuah tanki berkapasitas 50 liter mula-mula mengandung 50 liter larutan dengan kandungan garam sebanyak $\frac{1}{10}$ kilogram per liter. Kemudian larutan yang mengandung garam sebanyak $\frac{1}{2}$ kilogram per liter masuk ke dalam tanki dengan kecepatan 4 liter/menit dan secara bersamaan larutan dalam tanki keluar dengan kecepatan yang sama pula. Diasumsikan larutan dalam tanki tercampur secara baik. Tentukan banyaknya garam yang terkandung di dalam tanki untuk waktu yang sangat lama.

- a. 4 kg
- b. 5 kg
- c. 10 kg
- d. 25 kg
- e. 30 kg

36. Jika x, y adalah bilangan bulat yang memenuhi $3456x + 246y = 73$. Maka

$$x + y =$$

- a. -2
- b. 0
- c. 1
- d. 3
- e. Tidak ada jawaban yang benar

37. Solusi umum dari persamaan differensial berikut

$$2x y y' = 4x^2 + 3y^2$$

adalah

- a. $y = -4x^2 + cx^3$
- b. $y^2 = 4x^2 + cx^5$
- c. $y = -4x^2 + cx^3$
- d. $y^2 = -4x^2 + cx^3$
- e. $y = cx^2 + 4x^3$

38. Sti menggambar segi 9 beraturan. Ia ingin memberi angka 1 sampai 9 pada setiap titik sudut sedemikian sehingga jumlah 3 angka yang letaknya berurutan tidak melebihi sebuah nilai bilangan bulat positive n . Nilai minimum dari n yang mungkin adalah

- a. 13
- b. 14
- c. 15
- d. 16
- e. 17

39. Pernyataan yang tidak selalu berlaku adalah

- a. Jika $T: U \rightarrow V$ merupakan transformasi linear dari U ke V maka $T(xy) = T(x)T(y)$ untuk semua vektor x dan y di U
- b. Jika A sebarang matriks $n \times m$ dan pemetaan T didefinisikan sebagai $T(x) = Ax$, maka T selalu berbentuk transformasi linear
- c. Jika $T: U \rightarrow V$ merupakan transformasi linear dari U ke V maka $T(-x) = -T(x)$ untuk semua vektor x di U .
- d. Jika $T: U \rightarrow V$ merupakan transformasi linear dari U ke V maka $T(0) = 0$ di V untuk 0 di U .
- e. Jika $T: U \rightarrow V$ merupakan transformasi linear dari U ke V maka $T(2x) = 2T(x)$ untuk semua vektor x di U .

40. Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan a_1, a_2, \dots, a_n adalah bilangan riil positif.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{1/x} =$$

- a. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^n$
- b. $(a_1 a_2 \dots a_n)^n$
- c. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{\frac{1}{n}}$
- d. $(a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$
- e. Tidak ada