



**BABAK PENYISIHAN SELEKSI TINGKAT PROVINSI**

**BIDANG KOMPETISI**

**MATEMATIKA**

## Olimpiade Sains Nasional Pertamina 2011

### Petunjuk :

1. Tuliskan secara lengkap isian pada Lembar Jawab Komputer
2. Ujian seleksi ini terdiri dari **50** soal pilihan ganda
3. Setiap nomor jika dijawab **benar** akan diberi nilai **4 poin**; namun jika dijawab **salah** akan diberikan nilai **-1 poin**.
4. Disediakan waktu **120 menit**
5. Gunakan pensil 2B untuk menjawab
6. Semua jawaban harus ditulis di lembar jawaban yang tersedia
7. Peserta dapat mulai bekerja bila sudah ada tanda mulai dari pengawas.
8. Peserta harus segera berhenti bekerja bila ada tanda berhenti dari Pengawas.
9. Letakkan lembar jawaban di meja sebelah kanan dan segera meninggalkan ruangan.
10. **Tidak diperkenankan** menggunakan kalkulator.

**Pilihlah jawaban yang paling tepat**

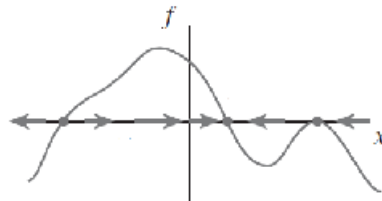
1. Misalkan  $(G,+)$  suatu grup dan  $a, b$  elemen-elemen di  $G$ . Jika  $ab=ba$ ,  $|a|=m$ ,  $|b|=n$  dan  $m, n$  saling prima relatif, maka...
  - a.  $|a+b|=|a|+|b|$
  - b.  $|ab|=|a||b|$
  - c.  $|ab| < |a||b|$
  - d.  $|a+b|=|a|=|b|-|ab|$
  - e.  $|ab|=|a+b|$
2. Penyelesaian dari  $\int_a^x (x-t)^5 y(t) dt = 4x^6$  adalah ...
  - a.  $y(x) = x^4$
  - b.  $y(x) = \frac{6}{5!}x^6$
  - c.  $y(x) = \frac{6}{5}x^5$
  - d.  $y(x) = \frac{5!}{6}x^5$
3. Misalkan  $a, b$  dan  $c$  bilangan bulat positif sehingga  $ab$  habis dibagi oleh  $2c$ ,  $bc$  habis dibagi oleh  $3a$ , dan  $ac$  habis dibagi oleh  $5b$ . Nilai terkecil yang mungkin dari  $abc$  adalah...
  - a. 10
  - b. 30
  - c. 90
  - d. 600
  - e. 900
4. Di suatu ruang kuliah tersedia tiga pintu. Berapa cara seorang dosen masuk dari suatu pintu tertentu dan keluar dari suatu pintu yang lain?
  - a. 1
  - b. 3
  - c. 6
  - d. 9
  - e. 12
5. Subset  $Z_6$  yang bukan merupakan subgroup dari  $Z_6$  adalah...
  - a.  $\{0\}$
  - b.  $\{0,1\}$
  - c.  $\{0,3\}$
  - d.  $\{0,2,4\}$
  - e.  $\{0,1,2,3,4,5\}$

6. Sebuah ujian terdiri atas dua bagian pertanyaan, A dan B. Untuk soal bagian A yang terdiri atas tiga pertanyaan, mahasiswa harus menjawab dua pertanyaan; sementara itu untuk soal bagian B yang terdiri atas empat pertanyaan mahasiswa harus menjawab dua pertanyaan. Soal bagian A harus diselesaikan dulu sebelum memulai soal bagian B. Dalam berapa cara mahasiswa mengerjakan soal ujian tersebut?
- 12
  - 15
  - 36
  - 72
  - 90
7. Solusi persamaan diferensial  $(3x + \frac{6}{y}) + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = 0$  adalah...
- $x^3y^2 + 2xy = c$
  - $x^3y^2 + x^3 + y^2 = c$
  - $x^3 + 3xy + y^2 = c$
  - $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$
  - $x^3y + xy + y^3 = c$
8. Bilangan Palindrome adalah bilangan yang bernilai sama ketika urutan bilangannya dibalik, contoh 83438. Bilangan  $x$  dan  $x + 32$  adalah bilangan palindrome 3 digit dan 4 digit secara berurut. Jumlah bilangan pada digit  $x$  adalah...
- 20
  - 21
  - 22
  - 23
  - 24
9. Penyelesaian dari  $\int_a^x \frac{e^{\lambda(x-t)}}{\sqrt{x^2-t^2}} y(t) dt = f(x)$  adalah ...
- $y(x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\lambda}$
  - $y(x) = \frac{2}{\pi} e^{\lambda x} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{te^{-\lambda t}}{\sqrt{x^2-t^2}} f(t) dt$
  - $y(x) = e^{-\lambda x} (f'_x(x) - \lambda f(x))$
  - $y(x) = e^{-\lambda x} (f'_x(x) - \lambda x f(x))$
  - tidak ada solusi

10. Persamaan berikut yang **bukan** merupakan persamaan diferensial adalah...
- $\frac{dx}{dt} = 2\sin(x(t))$
  - $\frac{dx}{dt} = x(2x(t))$
  - $\frac{dx}{dt} = x^2(t)$
  - $\frac{dx}{dt} = x(t) + \cos(x(t))$
  - $\frac{dx}{dt} = \pi$
11. Jika H merupakan matriks kuadrat  $n \times n$ , maka pernyataan yang tak setara dengan pernyataan lain adalah...
- $Hx=0$  hanya mempunyai solusi trivial
  - $Hx=b$  mempunyai solusi tunggal untuk  $b=0$
  - Terdapat beberapa matriks G berukuran  $n \times n$  sehingga GH adalah matriks identitas
  - $\text{Det}(H)$  tidak mungkin bernilai 0
  - Vektor-vektor kolom H saling bebas linear
12. Luas maksimum dari suatu segiempat yang terletak di dalam lingkaran berjari – jari 1 adalah ...
- $\pi$
  - $2\pi$
  - 1
  - 2
  - 1/2
13.  $n$  adalah bilangan bulat positif terkecil dengan kondisi  $n$  habis dibagi 20,  $n^2$  adalah bilangan kubik,  $n^3$  adalah bilangan kuadrat.  $n + 1234567 = \dots$
- 2234567
  - 2334567
  - 2344567
  - 2345567
  - 2345677
14. Misalkan F dan H adalah subgrup-subgrup dari grup G, maka pernyataan yang selalu berlaku adalah...
- $F \cup H$  subgrup dari G
  - $F+H$  subgrup dari G
  - $F \cap H$  subgrup dari G
  - $F-H$  subgrup dari G
  - Tidak ada pernyataan yang benar

15. Diberikan persamaan diferensial berdimensi 1 *autonomos* sebagai berikut.

dengan medan vektor



Persamaan diferensial tersebut mempunyai...

- a. 0 titik ekuilibrium yang stabil
  - b. 1 titik ekuilibrium yang stabil
  - c. 2 titik ekuilibrium yang stabil
  - d. 3 titik ekuilibrium yang stabil
  - e. 4 titik ekuilibrium
16. Di sebuah negara terdapat 60% dari warganya laki-laki dan 70% dari warganya perempuan yang berhak mengikuti pemilihan umum. Saat pemilihan umum berlangsung hanya 60% dari pemilih laki-laki yang memilih dan hanya 60% dari pemilih perempuan yang memilih. Berapa persenkah total warga yang memilih di dalam pemilihan umum tersebut?
- a. 0.42
  - b. 0.48
  - c. 0.49
  - d. 0.54
  - e. 0.60
17. Solusi dari persamaan diferensial

\_\_\_\_\_

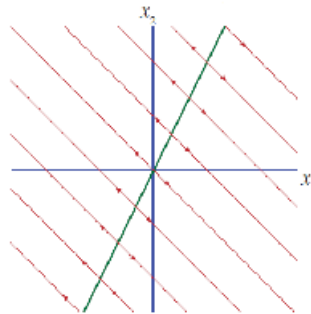
adalah ...

- a. \_\_\_\_\_
- b. \_\_\_\_\_
- c. \_\_\_\_\_
- d. \_\_\_\_\_
- e. \_\_\_\_\_

18. Nilai dari  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \dots$

- a. -1
  - b. 0
  - c. 1
  - d. e
  - e. tidak ada solusi
19. Berapa banyak bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 1000 dan sama dengan 6 kali jumlah digit-digitnya?
- a. 0
  - b. 1
  - c. 2
  - d. 4
  - e. 12
20. Ada 87 bola dalam sebuah keranjang. Masing-masing bola diwarnai dengan paling sedikit satu salah satu dari dua warna, merah atau hijau. Setelah diperiksa ternyata  $\frac{2}{7}$  dari bola warna merah juga memiliki warna hijau. Sementara itu  $\frac{3}{7}$  dari bola yang hijau juga memiliki warna merah. Berapa bagiankah bola yang di dalam keranjang itu memiliki kedua warna merah dan hijau?
- a.  $\frac{6}{14}$
  - b.  $\frac{2}{7}$
  - c.  $\frac{6}{35}$
  - d.  $\frac{6}{29}$
  - e.  $\frac{6}{42}$
21. Sebanyak  $n$  bilangan riil ( $n \geq 5$ ) ditulis dalam satu baris. Jika diketahui jumlah setiap tiga bilangan yang berurutan adalah positif dan jumlah setiap lima bilangan yang berurutan adalah negatif, maka nilai  $n$  terbesar yang mungkin adalah...
- a. 5
  - b. 6
  - c. 7
  - d. 8
  - e. 9

22. 40% dari pegawai suatu perusahaan adalah pekerja, sisanya para eksekutif. Jika pendapatan tahunan dari masing-masing pekerja adalah 39 juta rupiah dan pendapatan tahunan masing-masing eksekutif adalah 42 juta rupiah. Berapakah rata-rata pendapatan tahunan semua pegawai tersebut?
- 39,00 juta rupiah
  - 40,50 juta rupiah
  - 40,80 juta rupiah
  - 41,50 juta rupiah
  - 42,00 juta rupiah
23. Grup yang hanya mempunyai subgroup  $\{0\}$  dan  $G$  sendiri adalah...
- $Z_4$
  - $Z_6$
  - $Z_7$
  - $Z_8$
  - $Z_9$
24. Jumlah digit pada kuadrat dari 111.111.111 adalah...
- 18
  - 27
  - 45
  - 63
  - 81
25. Sebuah sistem diferensial  $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mempunyai *phase portrait* sebagai berikut.



Sistem tersebut mempunyai...

- 0 titik ekuilibrium
- 1 titik ekuilibrium yang tidak stabil
- 1 titik ekuilibrium yang stabil
- 1 titik ekuilibrium yang *saddle*
- Tak hingga buah titik ekuilibrium yang tidak stabil



26. Transformasi lineat  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dengan kernel berbentuk bidang  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = x_3\}$  adalah...
- $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + x_3$
  - $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 4x_2 + x_3$
  - $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - x_3$
  - $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3$
  - $T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 4x_2 + x_3$
27. Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi yang diferensiabel. Asumsikan bahwa  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  untuk suatu bilangan real  $a$ , dan  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x)$  ada. Maka nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x)$  adalah...
- 0
  - 1
  - $a$
  - $\frac{1}{a}$
  - 1/2
28. Barisan  $x_n$  didefinisikan sebagai berikut:  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ . Maka bagian bulat dari nilai  $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_{100}+1}$  adalah ...
- 0
  - 1
  - 2
  - 3
  - 4
29. Dari 750 peserta suatu konferensi 450 orang adalah perempuan. Setengah dari peserta perempuan umurnya kurang dari 30 tahun, dan seperempat dari peserta laki-laki umurnya kurang dari 30 tahun. Jika salah seorang dari peserta konferensi dipilih secara acak untuk mendapatkan hadiah. Berapa kemungkinan yang terpilih adalah peserta yang umurnya kurang dari 30 tahun?
- 1/8
  - 1/2
  - 3/8
  - 2/5
  - 3/4

30. Inverse transformasi Laplace dari

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$$

adalah...

- a.  $f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-a)e^{-(t-a)} \sin 2a \, da$
  - b.  $f(t) = \int_0^t (t-a)e^{-(t-a)} \sin a \, da$
  - c.  $f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-a)e^{t-a} \sin a \, da$
  - d.  $f(t) = \int_0^t (t-a)e^{-(t-a)} \sin 2a \, da$
  - e.  $f(t) = 2 \int_0^t (t-a)e^{-(t-a)} \sin a \, da$
31. Jika  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  merupakan transformasi linear, maka pernyataan yang tidak selalu berlaku adalah...
- a. Jika  $L$  mempunyai invers maka  $L^{-1}$  juga mempunyai invers
  - b. Jika  $Lv = 3v$  untuk setiap vektor  $v$  di  $\mathbb{R}^2$  maka  $L^{-1}(w) = 1/5 w$  untuk setiap vektor  $w$  di  $\mathbb{R}^2$
  - c. Jika  $L$  mempunyai invers maka  $L^{-1}0 = 0$
  - d. Jika  $Lv = 0$  hanya untuk beberapa vektor  $v$  di  $\mathbb{R}^2$  maka  $L$  tidak mempunyai invers
  - e. Pemetaan identitas mempunyai invers

32. Semua nilai yang memenuhi untuk  $(a, b, c)$  sedemikian sehingga

$$|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1 \text{ untuk } |x| \leq 1 \text{ dan } \frac{8}{3}a^2 + 2b^2 \text{ maksimum adalah ...}$$

- a.  $\{(-2, 0, 1), (2, 0, -1)\}$
  - b.  $\{(-2, 1, 0), (2, -1, 0)\}$
  - c.  $\{(-2, 1, 1), (2, 1, -1)\}$
  - d.  $\{(-3, 1, 0), (3, 1, 0)\}$
  - e. tidak ada solusi
33.  $n$  adalah dua digit terakhir yang tidak nol dari  $90!$  Bilangan  $n$  adalah...
- a. 12
  - b. 32
  - c. 48
  - d. 52
  - e. 68

34. Di sebuah komplek, 250 keluarga memiliki paling sedikit satu mobil, sementara itu 60 keluarga memiliki paling sedikit dua mobil. Berapa keluargakah yang hanya memiliki tepat satu mobil?
- 30
  - 190
  - 280
  - 310
  - 420
35. Orbit dari sistem  $\dot{x} = e^{x+y}(x+y)$ ,  
 $\dot{y} = e^{x+y}(x-y)$  memenuhi ...
- $y^2 - 2x^2 = c$
  - $3y^2 - 2x^2 = c$
  - $(2y+x)^2 - 2x^2 = c$
  - $(y+x)^2 - 2x^2 = c$
  - $(y+2x)^2 - 2x^2 = c$
36. Banyaknya bilangan prima  $p$ , sehingga  $p^3 - 4p + 9$  adalah bilangan kuadrat sempurna, adalah...
- 1
  - 2
  - 3
  - 4
  - 5
37. Jika  $A$  matriks tak singular maka sifat yang belum tentu berlaku adalah...
- Det  $A$  tidak nol
  - $A^T A$  definit positif
  - $A^{-1} = A^T$
  - $A$  mempunyai invers
  - Invers  $A$  tunggal
38. Asumsikan bahwa  $F$  dan  $G$  adalah fungsi yang diferensiabel, dengan  $F'(x) = -G(x)$  dan  $G'(x) = -F(x)$ . Misalkan  $H(x) = [F(x)]^2 - [G(x)]^2$ . Maka  $H'(x)$  adalah ...
- $e^{-2x}$
  - $-e^{2x}$
  - 0

- d. 4
- e.  $x$

39. Solusi dari  $2x + y + (x + 5y)y = 0$  adalah...

- a.  $x^2 + 5xy + 2y^2 = c$
- b.  $2x^2 + 5y^2 = c$
- c.  $2x^2 + 2xy + 5y^2 = c$
- d.  $(2x - 5y)^2 - 2xy = c$
- e.  $2(x + y)^2 - 2xy + 3y^2 = c$

40. Seorang pekerja dikontrak untuk 7 hari kerja. Setiap hari dia dibayar sepuluh ribu rupiah lebih dari total yang dia peroleh pada hari sebelumnya. Total gaji yang dia dapat untuk 4 hari pertama kerja ternyata sama dengan total gaji yang dia peroleh untuk 3 hari terakhir dia bekerja. Berapakah gaji dia di hari pertama kerja?

- a. 90
- b. 138
- c. 153
- d. 160
- e. 163

41. Jumlah semua bilangan bulat  $d$  sehingga  $d^2 + 1$  membagi  $d + 7$  adalah...

- a.  $-7$
- b.  $-6$
- c. 0
- d. 1
- e. 6

42. Generator dari grup siklis  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$  adalah...

- a. 0 dan 1
- b. 0, 1 dan 2
- c. 1, 2, 3 dan 4
- d. 1, 5, 7 dan 11
- e. 1, 3, 5, 7 dan 11

43. Nilai dari  $\left(\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2} + \cos \frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2} + \cos \frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2} + \cos \frac{27\pi}{20}\right) = \dots$
- $\frac{1}{4}$
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{1}{16}$
  - $\frac{1}{27}$
  - $\frac{1}{30}$
44. Dalam suatu pemilihan dengan sistem *multi-voting*, pemilih boleh memilih lebih dari satu kandidat. Dua orang kandidat A dan B bersaing untuk mendapatkan suara pemilih. 100 pemilih memberi suara pada A dan 50 dari 250 pemilih memilih kedua kandidat. Jika masing-masing kandidat memilih paling sedikit satu dari dua kandidat, berapa pemilihkah yang memilih hanya kandidat B?
- 50
  - 100
  - 150
  - 200
  - 250
45. Misalkan  $H = \{0,4\}$  adalah subgroup dari  $Z_8$ , maka koset kanan dari  $Z_8$  adalah...
- $\{0,4\}, \{1,5\}, \{2,6\}, \{3,7\}$
  - $\{0,1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6,8\}$
  - $\{0,2\}, \{0,4\}, \{0,6\}, \{0,8\}$
  - $\{0,2\}, \{0,4\}, 0,8\}$
  - $\{0,2\}, \{0,4\}$
46. Jika diketahui bahwa  $x + x^{-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , maka  $x^{2000} + x^{-2000}$  adalah ...
- 1
  - 2
  - $\sqrt{5}$
  - 5
  - $\frac{1}{5}$
47. Sebuah survei terhadap  $n$  penduduk sebuah kota A, 50% penduduknya menyukai olah raga Badminton. Sementara itu survei terhadap 100 orang penduduk kota B ditemukan 60% menyukai olah raga Badminton. Jika dari total penduduk yang disurvei diperoleh 55% penduduk yang menyukai olah raga Badminton, berapakah total penduduk yang disurvei ?
- 50
  - 100
  - 150
  - 200
  - 250

48. Jika  $N$  adalah bilangan asli terbesar  $n$  yang memenuhi  $\frac{n}{n+1} < \frac{6024}{6027}$ , maka jumlah digit-digit dari  $N$  adalah...

- a. 6
- b. 7
- c. 8
- d. 9
- e. 10

49. Solusi masalah nilai awal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 5y, \\ \dot{y} &= -x - 3y,\end{aligned}$$

dengan  $x(0) = -2$  dan  $y(0) = 1$  adalah ...

- a.  $e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \cos t + 2 \sin t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix}$
- b.  $e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \cos t + \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$
- c.  $e^t \begin{bmatrix} -2 \cos t + 2 \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$
- d.  $e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \cos 2t + \sin t \\ \cos 2t + \sin t \end{bmatrix}$
- e.  $e^{-2t} \begin{bmatrix} -2 \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t \end{bmatrix}$

50. Jika  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ , maka  $e^{At} = \dots$

- a.  $e^{(a^2+b^2)t}$
- b.  $e^{(a^2+b^2)t}$
- c.  $t \begin{bmatrix} e^a & e^b \\ e^{-b} & e^a \end{bmatrix}$
- d.  $e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$
- e.  $e^{at} \begin{bmatrix} \cos at & \sin bt \\ -\sin bt & \cos at \end{bmatrix}$